Research Review
Jurnal Ilmiah Multidisiplin
Vol. 5, No. 1, Mei 2026 ISSN: 29622743

Reformulasi dan Pembuktian Teorema Menelaus menggunakan Variabel Kompleks

(Reformulation and Proof of Menelaus' Theorem Using Complex Variables)

Deny Ardika Prasetyo[1], Asriadi[2], Lailany Yahya [3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo
deardikaprasetyo@gmail.com[1], asriadi@ung.ac.id[2], lailany.yahya@ung.ac.id[3]

Article Info

Article history:

Received: 30 April 2026
Revised: 19 Mei 2026
Accepted: 20 Mei 2026

Keywords:

Reformulation
Menelaus' Theorem
Complex Variables
Collinearity
Plane Geometry

Kata Kunci:
Reformulasi
Teorema Menelaus
Variabel Kompleks
Kolinearitas
Geometri Bidang

Abstract

This study aims to reformulate and prove Menelaus's Theorem using a complex variable approach. In classical Euclidean geometry, Menelaus's Theorem states that three points, each lying on a side or the extension of a side of a triangle, are collinear if and only if the product of the ratios of the lengths of the resulting line segments equals one. Through a complex algebraic approach, this study systematically reorganizes the proof of the theorem and represents the geometric structure of triangles and straight lines in the complex plane. The representation of points and line segments, along with the use of fundamental properties such as conjugates and modulus, is employed to prove the theorem analytically. The findings of this study confirm that the use of complex variables provides an efficient analytical framework for deriving geometric proofs, resulting in a more systematic logical flow compared to the classical geometric approach. This study offers a new perspective on the development of modern geometry and opens up opportunities for further exploration in the application of complex variables to solve other geometric problems.

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mereformulasi dan membuktikan Teorema Menelaus dengan menggunakan pendekatan variabel kompleks. Dalam geometri euclidian klasik, teorema menelaus dinyatakan bahwa tiga titik yang masing-masing terletak pada sisi atau perpanjangan sisi suatu segitiga bersifat kolinear jika dan hanya jika hasil kali rasio perbandingan panjang ruas-ruas garis yang terbentuk bernilai negatif satu. Melalui pendekatan aljabar kompleks, penelitian ini menyusun ulang pembuktian teorema tersebut secara sistematis serta merepresentasikan struktur geometri segitiga dan garis lurus dalam bidang kompleks. Representasi titik, ruas garis, serta pemanfaatan sifat-sifat fundamental seperti konjugat dan modulus digunakan untuk membuktikan teorema tersebut secara analitik. Temuan penelitian ini mengonfirmasi bahwa penggunaan variabel kompleks memberikan kerangka analitik yang efisien dalam menurunkan bukti-bukti geometris, sehingga menghasilkan alur logika yang lebih sistematis dibandingkan pendekatan geometri klasik. Penelitian ini memberikan perspektif baru terhadap pengembangan geometri modern, serta membuka peluang eksplorasi lebih lanjut dalam penerapan variabel kompleks untuk menyelesaikan permasalahan geometri lainnya.

.

Corresponding Author:

Deny Ardika Prasetyo
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Gorontalo
deardikaprasetyo@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang matematika fundamental yang mengkaji bentuk, ukuran, posisi relatif, serta sifat-sifat ruang. Dalam geometri bidang, segitiga menjadi objek kajian penting karena memuat berbagai konsep dasar dan teorema klasik, salah satunya adalah Teorema Menelaus (Unaenah et al., 2020). Teorema ini berperan dalam menentukan kondisi kolinearitas tiga titik melalui hubungan rasio ruas garis pada sisi-sisi segitiga maupun perpanjangannya (Nurahmi et al., 2015). Selain memiliki nilai teoritis dalam geometri Euclid, Teorema Menelaus juga menjadi dasar bagi pengembangan berbagai konfigurasi geometri yang lebih kompleks dan memiliki keterkaitan erat dengan kajian geometri modern.

Dalam perkembangannya, Teorema Menelaus telah banyak dikaji dan diperluas dalam berbagai konteks. Nurahmi et al. (2015), Sandi et al. (2018), Rohmawati (2020), dan Murtadha (2022) mengembangkan teorema ini berturut-turut pada segiempat, segilima, segienam, dan segitujuh melalui pendekatan geometri klasik berbasis kesebangunan dan konstruksi Euclid. Sementara itu, Szirmai (2023) menunjukkan relevansi Teorema Menelaus dalam geometri Nil, yang memperlihatkan bahwa teorema ini tetap memiliki signifikansi bahkan dalam geometri non-Euclid. Berbagai pengembangan tersebut memperkaya cakupan penerapan Teorema Menelaus, tetapi sebagian besar masih berfokus pada perluasan objek geometris, bukan pada reformulasi metode pembuktiannya.

Di sisi lain, berkembang pula pendekatan aljabar dalam geometri yang memanfaatkan bilangan kompleks sebagai alat representasi dan analisis konfigurasi geometris. Bilangan kompleks memungkinkan titik, garis, dan hubungan geometris dinyatakan secara aljabar, sehingga membuka peluang pembuktian yang lebih sistematis dibanding pendekatan sintetik klasik. Tristianto et al. (2018) menunjukkan bahwa pendekatan bilangan kompleks dapat menghasilkan penyelesaian geometri yang lebih efisien, sedangkan Lamuda dan Asriadi (2025) menegaskan efektivitas variabel kompleks dalam menyederhanakan pembuktian teorema-teorema geometri klasik.

Kajian yang lebih spesifik dilakukan oleh Ichikawa et al. (2021) melalui generalisasi Teorema Menelaus berbasis rasio kompleks. Penelitian tersebut memperluas konsep pembagian ruas garis dari bilangan real ke bilangan kompleks dan menunjukkan adanya syarat tambahan untuk menjamin kolinearitas titik. Namun demikian, pendekatan tersebut berorientasi pada generalisasi struktur teorema, bukan pada penyusunan ulang bentuk klasik Teorema Menelaus menggunakan kerangka bilangan kompleks tanpa mengubah esensi teoremanya. Di sinilah terdapat kesenjangan penelitian yang masih relatif belum banyak dikaji.

Berdasarkan kondisi tersebut, penelitian ini menawarkan kebaruan berupa reformulasi dan pembuktian Teorema Menelaus klasik menggunakan variabel kompleks sebagai alternatif pendekatan aljabar terhadap pembuktian geometri klasik. Berbeda dengan penelitian sebelumnya yang berfokus pada generalisasi konfigurasi atau perluasan bentuk teorema, penelitian ini menitikberatkan pada penggunaan bilangan kompleks sebagai kerangka untuk membuktikan kembali Teorema Menelaus secara lebih ringkas, sistematis, dan terstruktur. Melalui representasi titik, garis, dan ruas garis pada bidang kompleks, hubungan rasio ruas garis dan kondisi kolinearitas dianalisis menggunakan sifat-sifat aljabar seperti modulus dan konjugat kompleks. Pendekatan ini penting tidak hanya sebagai alternatif teknis pembuktian, tetapi juga sebagai upaya menjembatani geometri sintetik dengan analisis kompleks melalui suatu kerangka yang terpadu. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan berkontribusi dalam memperkaya metode pembuktian aljabar dalam geometri sekaligus membuka peluang pengembangan pendekatan serupa pada teorema-teorema geometri lainnya.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan mereformulasi dan membuktikan Teorema Menelaus pada segitiga menggunakan variabel kompleks. Unit analisis penelitian difokuskan pada hubungan perbandingan ruas garis dan kondisi kolinearitas titik dalam representasi bidang kompleks. Artikel ini disusun sebagai berikut. Bagian berikutnya memaparkan metode penelitian berbasis studi literatur, dilanjutkan dengan hasil reformulasi dan pembuktian Teorema Menelaus beserta pembahasannya, dan diakhiri dengan kesimpulan serta implikasi penelitian.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur (*library research*) dengan pendekatan deskriptif-kualitatif berbasis analisis matematis. Metode ini digunakan karena penelitian berfokus pada reformulasi dan pembuktian Teorema Menelaus melalui pendekatan variabel kompleks, sehingga sumber utama penelitian berasal dari telaah konseptual terhadap literatur ilmiah yang relevan.

Data penelitian berupa sumber sekunder yang diperoleh dari buku referensi, artikel jurnal nasional dan internasional, serta hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan Teorema Menelaus, geometri bidang, bilangan kompleks, dan pembuktian teorema geometri secara aljabar. Literatur yang digunakan dipilih berdasarkan relevansi substansi kajian, khususnya penelitian-penelitian yang membahas pengembangan Teorema Menelaus maupun penerapan bilangan kompleks dalam geometri.

Prosedur penelitian dilaksanakan melalui beberapa tahapan sistematis. Tahap pertama adalah identifikasi dan kajian literatur untuk memperoleh landasan teoritis terkait Teorema Menelaus dan konsep-konsep bilangan kompleks yang digunakan dalam pembuktian. Tahap kedua adalah mereformulasi Teorema Menelaus ke dalam representasi bidang kompleks dengan memodelkan titik-titik geometri sebagai bilangan kompleks dan menurunkan hubungan-hubungan aljabarnya.

Tahap berikutnya adalah penyusunan model matematis yang mendukung proses pembuktian, meliputi formulasi garis, representasi rasio ruas garis, serta penggunaan sifat-sifat aljabar kompleks seperti konjugat dan modulus untuk menganalisis kondisi kolinearitas. Setelah model matematis diperoleh, dilakukan pembuktian formal terhadap reformulasi Teorema Menelaus secara deduktif melalui manipulasi aljabar kompleks dan verifikasi kesetaraan dengan bentuk klasik teorema tersebut.

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan secara matematis dan deduktif dengan menelaah konsistensi logis setiap langkah pembuktian, kesesuaian hasil reformulasi dengan teorema asal, serta membandingkannya dengan hasil penelitian terdahulu yang relevan. Validitas kajian dijaga melalui triangulasi sumber pustaka dan verifikasi teoritis terhadap setiap konstruksi matematis yang digunakan.

Melalui tahapan tersebut, penelitian ini menghasilkan reformulasi Teorema Menelaus menggunakan variabel kompleks beserta pembuktiannya secara sistematis sebagai alternatif pendekatan aljabar dalam kajian geometri bidang.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan kompleks diperkenalkan sebagai respons atas keterbatasan bilangan real dalam menyelesaikan persamaan kuadrat tertentu, seperti $x^2 + 1 = 0$, yang tidak memiliki penyelesaian dalam himpunan bilangan real. Gagasan awal mengenai bilangan ini mulai muncul pada abad ke-16 melalui karya Gerolamo Cardano dalam *Ars Magna* (1545). Meskipun Cardano telah menemukan bentuk akar negatif, ia belum sepenuhnya memahami makna matematis dari konsep tersebut (Fenn, 2001). Perkembangan signifikan selanjutnya dilakukan oleh Rafael Bombelli (1526-1572) yang mulai memperlakukan akar negatif secara sistematis dalam kerangka aljabar, yang kemudian dikenal sebagai bilangan imajiner. Bombelli menunjukkan bahwa walaupun bilangan tersebut tampak tidak memiliki interpretasi nyata, operasinya tetap konsisten dan berguna dalam penyelesaian persamaan aljabar (Gavagna & Veronica, 2014). Pada abad ke-17, Rene Descartes memperkenalkan istilah bilangan imajiner untuk menyebut bilangan tersebut, meskipun ia sendiri masih meragukan eksistensinya secara matematis (Dong Hwan, 2014). Seiring berkembangnya teori matematika, bilangan kompleks mulai diterima dan dimanfaatkan secara lebih luas oleh para matematikawan.

Kontribusi penting terhadap pemantapan konsep bilangan kompleks terjadi pada abad ke-18 melalui karya Leonhard Euler dan Carl Friedrich Gauss. Euler memperkenalkan hubungan mendalam antara bilangan kompleks dan fungsi trigonometri melalui bentuk eksponensial yang dikenal sebagai rumus Euler (Babusci et al., 2012). Di sisi lain, Gauss mengembangkan landasan teori bilangan kompleks dan memperkenalkan representasi geometris bilangan kompleks pada bidang dua dimensi, yang kini dikenal sebagai bidang kompleks atau bidang Gauss (Stillwel, 2008). Sejak saat itu, bilangan kompleks berkembang menjadi bagian fundamental dalam berbagai cabang matematika, seperti aljabar, analisis, dan geometri, serta memainkan peran penting dalam berbagai disiplin ilmu lain, termasuk teori sistem dinamis, fisika, dan teknik. Pemahaman tentang sejarah ini penting karena menunjukkan bahwa bilangan kompleks, yang awalnya dianggap sebagai alat abstrak tanpa makna geometris, ternyata memiliki representasi geometris yang sangat alami. Representasi inilah yang menjadi kunci dalam penelitian ini, karena memungkinkan kita untuk menerjemahkan masalah-masalah geometri, termasuk Teorema Menelaus, ke dalam bahasa aljabar kompleks.

Sebelum memasuki inti reformulasi dan pembuktian Teorema Menelaus, perlu diuraikan secara singkat mengapa pendekatan bilangan kompleks dipilih sebagai alternatif terhadap metode geometri klasik. Selama berabad-abad, geometri Euclidean dikembangkan dengan mengandalkan konstruksi, kesebangunan, dan penalaran sintetik yang sangat bergantung pada representasi visual. Meskipun pendekatan ini berhasil membangun kerangka geometri yang kokoh, ia memiliki keterbatasan ketika dihadapkan pada konfigurasi

yang rumit atau ketika diperlukan generalisasi ke dimensi atau struktur yang lebih abstrak. Di sinilah bilangan kompleks memainkan peran penting.

Bilangan kompleks, yang pertama kali muncul sebagai alat untuk menyelesaikan persamaan polinomial, ternyata memiliki struktur yang secara alami sesuai dengan geometri bidang. Setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dipandang sebagai titik (x,y) pada bidang Kartesius, dan operasi aljabar seperti penjumlahan, perkalian, dan konjugasi memiliki interpretasi geometris yang kaya: penjumlahan merepresentasikan translasi vektor, perkalian dengan bilangan kompleks bermodulus 1 merepresentasikan rotasi, dan konjugasi merepresentasikan refleksi terhadap sumbu real. Lebih jauh lagi, modulus $| z - w |$ menyatakan jarak Euclidean antara dua titik, sehingga seluruh konsep metrik geometri dapat dinyatakan dalam bahasa aljabar.

Keuntungan utama menggunakan bilangan kompleks dalam pembuktian teorema geometri terletak pada kemampuannya untuk menyatukan representasi titik, garis, dan lingkaran ke dalam bentuk persamaan yang ringkas. Sebagai contoh, garis lurus dapat ditulis sebagai himpunan titik yang memenuhi $A_0(Z - B_0) = \overline{A_0(Z - B_0)}$ yang setelah diuraikan menghasilkan persamaan linear dalam x dan y. Demikian pula, ruas garis dapat diparameterisasi dengan satu parameter real t dalam bentuk $Z = (1 - t)P + tQ$. Parameterisasi ini tidak hanya sederhana, tetapi juga memungkinkan kita untuk menganalisis perbandingan panjang ruas secara langsung tanpa harus menarik garis bantu tambahan. Dalam konteks Teorema Menelaus, pendekatan klasik menggunakan kesebangunan segitiga dan konstruksi garis tegak lurus (seperti pada bukti standar yang melibatkan tiga garis tinggi dari titik sudut ke garis transversal). Langkah-langkah tersebut efektif tetapi cenderung panjang dan kadang sulit diikuti tanpa gambar. Dengan pendekatan bilangan kompleks, kita akan melihat bahwa kondisi kolinearitas tiga titik dapat dinyatakan dalam bentuk produk rasio panjang yang sama dengan 1 (dalam nilai mutlak) atau -1 (dengan memperhatikan orientasi). Parameter t_1, t_2, λ, k yang mewakili letak titik pada sisi segitiga akan muncul secara alami, dan hubungan di antara mereka diturunkan melalui eliminasi aljabar biasa, bukan melalui penalaran kebesangunan yang bertingkat.

Lebih lanjut, pendekatan ini bersifat sistematis dan modular. Kita dapat membuktikan terlebih dahulu kasus khusus dengan salah satu titik sudut ditempatkan di titik asal (Teorema 3), kemudian memperluasnya ke kasus umum melalui translasi (Teorema 4). Strategi seperti ini sulit dilakukan dalam geometri sintetik karena translasi tidak mengubah sifat geometris namun sering kali memerlukan penanganan koordinat yang terpisah. Dalam bilangan kompleks, translasi cukup dengan mengurangkan semua titik dengan vektor yang sama, dan semua hubungan tetap invarian. Tidak kalah penting, pendekatan bilangan kompleks membuka peluang untuk komputasi simbolik dan generalisasi. Dengan menyatakan segitiga dan titik-titik transversal dalam bentuk parameter, kita dapat dengan mudah menulis program komputer untuk memverifikasi Teorema Menelaus untuk ribuan konfigurasi acak, atau bahkan mencari bentuk umum pada poligon dengan jumlah sisi yang lebih banyak. Hal ini sangat relevan dalam era komputasi modern, di mana eksplorasi matematika sering dibantu oleh alat numerik dan aljabar komputer. Dengan demikian, pembahasan berikutnya akan membangun kerangka representasi geometris dalam bidang kompleks secara lebih teknis, dilanjutkan dengan reformulasi dan pembuktian Teorema Menelaus.modern, di mana eksplorasi matematika sering dibantu oleh alat numerik dan aljabar komputer.

3.1 Representasi Geometri dalam Bidang Kompleks

Bilangan kompleks didefinisikan sebagai $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Secara geometris, bilangan kompleks dipandang sebagai titik atau vektor pada bidang kompleks (bidang Argand), di mana sumbu horizontal menyatakan bagian real $\mathrm{Re}\,(z) = x$ dan sumbu vertikal menyatakan bagian imajiner $\mathrm{Im}\,(z) = y$. Representasi ini memungkinkan kita untuk menerjemahkan objek-objek geometri dengan menggunakan bilangan kompleks, setiap titik di bidang tidak perlu lagi dipandang sebagai pasangan koordinat terpisah (x,y) yang harus diolah secara terpisah. Sebaliknya, ia menjadi satu kesatuan bilangan yang dapat dijumlah, dikali, atau dibagi layaknya bilangan real. Hal ini menyederhanakan banyak operasi geometri. Misalnya, memindahkan seluruh bangun sejauh vektor tertentu cukup dengan menambahkan bilangan kompleks yang sama ke semua titik. Memutar bangun terhadap titik asal cukup dengan mengalikan setiap titik dengan bilangan kompleks yang modulusnya satu dan sudutnya sesuai. Kemudian, konsep konjugat memungkinkan kita membedakan antara bagian real dan imajiner tanpa harus memisahkannya secara eksplisit. Konjugat juga berguna untuk mencerminkan bangun terhadap sumbu real. Adapun modulus, ia berfungsi sebagai pengukur jarak, sehingga teorema-teorema yang melibatkan perbandingan panjang ruas garis dapat ditulis ulang dalam bentuk yang lebih kompak. Secara keseluruhan, pendekatan ini mengubah soal geometri yang semula bersifat visual menjadi soal aljabar yang lebih terstruktur dan mudah diverifikasi. Inilah sebabnya mengapa bilangan kompleks menjadi alat yang sangat ampuh dalam pembuktian teorema-teorema klasik, termasuk Teorema Menelaus yang menjadi fokus penelitian ini.

3.1.1 Sifat-Sifat Penting

Untuk setiap $z, w \in \mathbb{C}$, didefinisikan konjugat $\bar{z} = x - iy$ dan modulus $| z |= \sqrt{x^2 + y^2}$. Konjugat mencerminkan titik terhadap sumbu real, sedangkan modulus menyatakan jarak dari titik asal. Beberapa sifat dasar yang akan digunakan dalam pembuktian adalah:

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$;
- $z\bar{z} =| z |^2$;
- $| zw |=| z || w |$ dan $| \frac{z}{w} |= \frac{|z|}{|w|}$ $(w \neq 0)$;
- $| z - w |$ menyatakan jarak Euclidean antara dua titik.

Teorema 1 (Garis dalam Bidang Kompleks). Diberikan titik $A_0, B_0 \in \mathbb{C}$ dengan $A_0 \neq 0$. Himpunan $g = \{Z \in \mathbb{C} \mid A_0(Z - B_0) = A_0(\bar{Z} - B_0)\}$ adalah sebuah garis lurus. Bentuk parametrik real dari garis yang melalui dua titik berbeda Z_1, Z_2 adalah $g(Z_1, Z_2) = \{(Z_1 - Z_2)t + Z_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. (Asriadi, 2025).

Teorema 2 (Ruas Garis). Ruas garis dengan titik ujung $P, Q \in \mathbb{C}$ $(P \neq Q)$ didefinisikan sebagai rg $(P, Q) = \{Z \in \mathbb{C} :| P - Z | +| Q - Z |=| P - Q |\}$, dan ekuivalen dengan parameterisasi $Z = (P - Q)t + Q$ untuk $t \in [0,1]$.(Asriadi, 2025).

Fakta bahwa suatu titik Z berada pada ruas rg (P, Q) jika dan hanya jika terdapat $t \in [0,1]$ sehingga $Z = (1 - t)P + tQ$ (atau bentuk dengan $P - Q$) merupakan alat kunci dalam pembuktian nanti. Demikian pula, segitiga $\triangle ABC$ didefinisikan sebagai gabungan tiga ruas sisi rg $(A, B) \cup$ rg $(B, C) \cup$ rg (C, A). Dengan landasan ini, kita dapat merepresentasikan setiap titik pada sisi segitiga sebagai kombinasi linear dari titik-titik sudut dengan koefisien real antara 0 dan 1. Selanjutnya, kita akan mereformulasi Teorema Menelaus secara bertahap.

3.2 Reformulasi Teorema Menelaus untuk Kasus Khusus

Teorema 3. *Diberikan titik A, B, C pada bidang kompleks dengan $C = 0$. Jika titik $R \in rg(A, C)$, titik $Q \in rg(B, C)$, dan titik $P \in \big(g(R, Q) \cap g(A, B)\big)$ maka* $|A - P| \cdot |B - Q| \cdot |C - R| = |B - P| \cdot |Q - C| \cdot |R - A|$

Bukti. Menurut Teorema 2.9, terdapat bilangan real t_1 dan t_2 sehingga

$$R = (A - C)t1 + C = At1 + (1 - t1)C, \tag{4.1}$$

$$Q = (B - C)t2 + C = Bt2 + (1 - t2)C. \tag{4.2}$$

Karena $C = 0$, maka $R = t_1 A$ dan $Q = t_2 B$ untuk suatu bilangan real t_1 dan t_2. Sehingga :

$$\frac{|B-Q|}{|Q-C|} = \left|\frac{B-(t_2B+(1-t_2)C)}{(t_2B+(1-t_2)C)-C}\right| = \left|\frac{(1-t_2)(B-C)}{t_2(B-C)}\right| = \left|\frac{1-t_2}{t_2}\right|, \tag{4.3}$$

$$\frac{|C-R|}{|A-R|} = \left|\frac{C-(t_1A+(1-t_1)C)}{A-(t_1A+(1-t_1)C}\right| = \left|\frac{t_1(C-A)}{(1-t_1)(A-C)}\right| = \left|\frac{-t_1}{1-t_1}\right|. \tag{4.4}$$

Sebab P terletak pada $rg(A, B)$ maka terdapat parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sehingga :

$$P = (1 - \lambda)A + \lambda B \tag{4.5}$$

Dan P juga terletak pada $rg(A, B)$ maka terdapat parameter $k \in \mathbb{R}$ sehingga :

$$P = (1 - k)R + kQ \tag{4.6}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa:

$$\frac{|A-P|}{|B-P|} = \frac{|A-((1-\lambda)A+\lambda B)|}{|B-((1-\lambda)A+\lambda B)|} = \left|\frac{-\lambda(B-A)}{(1-\lambda)(B-A)}\right| = \left|\frac{-\lambda}{1-\lambda}\right| \tag{4.7}$$

Jadi rasio tersebut hanya bergantung pada λ. Selanjutnya kita akan mencari λ dari kondisi bahwa P juga berada pada RQ. Dari persamaan (4.5) dan persamaan (4.6) diperoleh :

$$Re\big((1 - \lambda)A + \lambda B\big) = Re((1 - k)R + kQ)$$
$$\Longrightarrow (1 - \lambda)Re(A) + \lambda Re(B) = (1 - k)Re(R) + kRe(Q)$$
$$\Longrightarrow Re(A) + (Re(B) - Re(A))\lambda = Re(R) + (Re(Q) - Re(R))k$$
$$\Longrightarrow \big(Re(B) - Re(A)\big)\lambda - (Re(Q) - Re(R))k = Re(R) - Re(A)$$

$$\Longrightarrow \big(Re(B) - Re(A)\big)\lambda + (Re(R) - Re(Q))k = Re(R) - Re(A) \qquad (4.8)$$

Dan

$$Im\big((1 - \lambda)A + \lambda B\big) = Im((1 - k)R + kQ)$$
$$\Longrightarrow (1 - \lambda)Im(A) + \lambda Im(B) = (1 - k)Im(R) + kIm(Q)$$
$$\Longrightarrow Im(A) + (Im(B) - Im(A))\lambda = Im(R) + (Im(Q) - Im(R))k$$
$$\Longrightarrow \big(Im(B) - Im(A)\big)\lambda - (Im(Q) - Im(R))k = Im(R) - Im(A)$$
$$\Longrightarrow \big(Im(B) - Im(A)\big)\lambda + (Im(R) - Im(Q))k = Im(R) - Im(A) \qquad (4.9)$$

Dari persamaan (4.8) dan (4.9) misalkan

$$a_1\lambda + b_1k = c_1, \qquad a_2\lambda + b_2k = c_2.$$

Dengan:

$a_1 = Re(B) - Re(A);$ $b_1 = Re(R) - Re(Q);$ $c_1 = Re(R) - Re(A);$
$a_2 = Im(B) - Im(A);$ $b_2 = Im(R) - Im(Q);$ $c_2 = Im(R) - Im(A).$

Dengan menggunakan metode eliminasi λ dan k (aturan cramer) didapatkan:

$\lambda = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},$ $k = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$

Selanjutnya, tuliskan $A = a_x + ia_y$ dan $B = b_x + ib_y$ dengan $a_x, a_y, b_x, b_y \in \mathbb{R}$. Maka diperoleh:

$Re(R) = t_1a_x,$ $Re(Q) = t_2b_x,$ $Re(A) = a_x,$ $Re(B) = b_x,$
$Im(R) = t_1a_y,$ $Re(Q) = t_2b_y,$ $Re(A) = a_y,$ $Re(B) = b_y.$

Sehingga:

$$\lambda = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$= \frac{(Im(R) - Im(Q))(Re(R) - Re(A)) - (Re(R) - Re(Q))(Im(R) - Im(A))}{(Re(B) - Re(A))(Im(R) - Im(Q)) - (Im(B) - Im(A))(Re(R) - Re(Q))}$$

$$= \frac{Im(R)(Re(Q) - Re(A)) - Im(Q)(Re(R) - Re(A)) + Im(A)(Re(R) - Re(Q))}{(Re(B) - Re(A))(Im(R) - Im(Q)) - (Im(B) - Im(A))(Re(R) - Re(Q))}$$

$$= \frac{t_1a_y(t_2b_x - a_x) - t_2b_y(t_1a_x - a_x) + a_y(t_1a_x - t_2b_x)}{(b_x - a_x)(t_1a_y - t_2b_y) - (b_y - a_y)(t_1a_x - t_2b_x)}$$

$$= \frac{t_1t_2a_yb_x - t_1a_ya_x - t_1t_2a_xb_y + t_2a_xb_y + t_1a_ya_x - t_2a_yb_x}{(b_x - a_x)t_1a_y - (b_x - a_x)t_2b_y - (t_1a_x - t_2b_x)b_y + (t_1a_x - t_2b_x)a_y}$$

$$= \frac{t_1t_2a_yb_x - t_1t_2a_xb_y + t_2a_xb_y - t_2a_yb_x}{t_1a_y(b_x - a_x) - t_1a_xb_y + t_1a_xa_y - t_2b_y(b_x - a_x) + t_2b_xb_y - t_2a_yb_x}$$

$$= \frac{t_1t_2(a_yb_x - a_xb_y) + t_2(a_xb_y - a_yb_x)}{t_1(a_yb_x - a_ya_x - a_xb_y + a_xa_y) - t_2(b_yb_x - b_ya_x + b_yb_x + a_yb_x}$$

$$= \frac{t_2[t_1(a_yb_x - a_xb_y) - (a_yb_x - a_xb_y)]}{t_1(a_yb_x - a_xb_y) - t_2(a_yb_x - a_xb_y)}$$

$$= \frac{t_2(t_1 - 1)(a_yb_x - a_xb_y)}{(t_1 - t_2)(a_yb_x - a_xb_y)}$$

$$= \frac{t_2(t_1 - 1)}{t_1 - t_2} \qquad (4.10)$$

Dengan mensubstitusikan nilai λ dari persamaan (4.10) ke dalam persamaan (4.7) diperoleh

$$\frac{|A-P|}{|B-P|} = \left|\frac{-\lambda}{1-\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1-t_2}}{1-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1-t_2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1-t_2}}{\frac{(t_1-t_2)-(t_1t_2-t_2)}{t_1-t_2}}\right| = \left|\frac{-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1-t_2}}{\frac{t_1(1-t_2)}{t_1-t_2}}\right|$$

$$= \left|-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1-t_2} \cdot \frac{t_1-t_2}{t_1(1-t_2)}\right| = \left|-\frac{t_2(t_1-1)}{t_1(1-t_2)}\right|$$

$$= \left|\frac{t_2(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\right|$$

Selanjutnya dengan menggabungkan persamaan (4.3), (4.4) dan (4.11) diperoleh

$$\frac{|A-P|}{|B-P|} \cdot \frac{|B-Q|}{|Q-C|} \cdot \frac{|C-R|}{|A-R|}$$

$$= \left|\frac{t_2(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\right| \cdot \left|\frac{1-t_2}{t_2}\right| \cdot \left|\frac{-t_1}{1-t_1}\right|$$

$$= \left|\frac{t_2(1-t_1)}{t_1(1-t_2)} \cdot \frac{1-t_2}{t_2} \cdot \frac{-t_1}{1-t_1}\right|$$

$$= \left|\frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{1}{t_2} \cdot -t_1\right|$$

$$= |-1|$$

$$= 1\,.$$

Jadi,

$$|A-P| \cdot |B-Q| \cdot |C-R| = |B-P| \cdot |Q-C| \cdot |R-A|$$

■

Kesamaan ini merupakan bentuk *produk rasio panjang* yang setara dengan pernyataan klasik Teorema Menelaus, tetapi dalam notasi modulus. Perhatikan bahwa dalam teorema asli, hasil kali rasio bernilai -1 (tanda negatif menunjukkan orientasi). Di sini, karena kita menggunakan nilai mutlak, tanda negatif hilang. Namun, arah (orientasi) dapat dikenali jika kita menggunakan rasio bertanda, misalnya menggunakan bilangan real negatif untuk titik yang terletak pada perpanjangan sisi. Dalam kerangka bilangan kompleks, rasio bertanda dapat diperoleh dengan mempertahankan parameter t_1, t_2, λ tanpa modulus, sehingga muncul faktor -1 secara alami dari arah vektor. Untuk artikel ini, fokus pada kesamaan nilai mutlak sudah cukup untuk membuktikan kolinearitas.

3.3 Reformulasi Teorema Menelaus Bentuk Umum

Teorema 2.4. *Diberikan titik U, V, W pada bidang kompleks. Jika titik $R \in rg(U,W)$, titik $Q \in rg(V,W)$, dan titik $P \in (g(R,Q) \cap g(U,V))$ maka*

$$|U-P| \cdot |V-Q| \cdot |W-R| = |V-P| \cdot |Q-W| \cdot |R-U|$$

Bukti. Misalkan

$A = U - W$, $\qquad P' = P - W$,

$B = V - W,$ $\quad Q' = Q - W,$
$C = W - W,$ $\quad R' = R - W.$
Menurut Teorema 2, berlaku terdapat $t_1 \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq t_1 \leq 1$ sehingga
$R = (U - W)t_1 + W$
$\Longrightarrow R - W = At_1$
$\Longrightarrow R' = (A - C)t_1 + C$
Ini berarti $R' \in rg(A, C)$.
Menurut Teorema 2, juga berlaku terdapat $t_2 \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq t_2 \leq 1$ sehingga
$Q = (V - W)t_2 + W$
$\Longrightarrow Q - W = Bt_2$
$\Longrightarrow Q' = (B - C)t_2 + C$
Ini berarti $Q' \in rg(B, C)$.
Sedangkan menurut Teorema 2.7 berlaku terdapat $t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ sehingga
$P = (R - Q)t_3 + Q;$ $\quad P = (U - V)t_4 + V$
$\Longrightarrow P - W = \big((R - W) - (Q - W)\big)t_3 + (Q - W);$
$P - W = \big((U - W) - (V - W)\big)t_4 + (V - W)$
$\Longrightarrow P' = (R' - Q')t_3 + Q';$
$P' = (A - B)t_4 + B$
Jadi, $P' \in (g(R', Q') \cap g(A, B))$.
Karena $R' \in rg(A, C)$, $Q' \in rg(B, C)$, dan $P' \in (g(R', Q') \cap g(A, B))$, maka menurut Teorema 4.1 berlaku

$$|A - P'| \cdot |B - Q'| \cdot |C - R'| = |B - P'| \cdot |Q' - C| \cdot |R' - A|$$
$$\Longrightarrow |(U - W) - (P - W)| \cdot |(V - W) - (Q - W)| \cdot |(W - W) - (R - W)|$$
$$= |(V - W) - (P - W)| \cdot |(Q - W) - (W - W)| \cdot |(R - W) - (U - W)|$$
$$\Longrightarrow |U - P| \cdot |V - Q| \cdot |W - R| = |V - P| \cdot |Q - W| \cdot |R - U|$$

Jadi, $|U - P| \cdot |V - Q| \cdot |W - R| = |V - P| \cdot |Q - W| \cdot |R - U|$

■

3.4 Interpretasi Geometris

Reformulasi Teorema Menelaus dalam kerangka bilangan kompleks tidak hanya menghasilkan alternatif pembuktian secara aljabar, tetapi juga memberikan interpretasi geometris yang lebih luas terhadap hubungan kolinearitas dalam segitiga. Dalam geometri klasik, Teorema Menelaus umumnya dipahami melalui hubungan perbandingan panjang ruas garis yang diperoleh menggunakan konstruksi kesebangunan segitiga. Pendekatan tersebut sangat bergantung pada argumen geometris sintetik dan sering memerlukan penambahan garis bantu untuk memperoleh hubungan rasio yang diinginkan. Melalui representasi kompleks, hubungan kolinearitas dalam Teorema Menelaus muncul secara alami melalui parameterisasi titik-titik pada sisi segitiga. Titik-titik transversal seperti P, Q, dan Rtidak lagi dipandang hanya sebagai objek geometris, tetapi juga sebagai representasi aljabar yang memenuhi hubungan linear tertentu. Dengan demikian, kondisi kolinearitas yang dalam pendekatan klasik diturunkan melalui kesebangunan, pada pendekatan kompleks dapat dipahami sebagai konsekuensi dari konsistensi parameter dan struktur aljabar titik-titik pada bidang kompleks.

Secara geometris, penggunaan parameter real t_1, t_2, dan λmenunjukkan bahwa titik-titik pembagi pada sisi-sisi segitiga dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linear titik ujungnya. Hal ini memberikan interpretasi bahwa konfigurasi Menelaus sesungguhnya berkaitan erat dengan struktur affine pada bidang. Dalam konteks ini, Teorema Menelaus dapat dipandang sebagai hubungan invarian yang tetap berlaku di bawah representasi affine melalui bilangan kompleks.

Selain itu, penggunaan modulus dalam pembuktian memberikan interpretasi baru terhadap rasio ruas garis. Dalam geometri Euclid klasik, rasio panjang diperoleh secara langsung melalui segmen-segmen pada gambar, sedangkan pada pendekatan kompleks rasio yang sama muncul dari sifat modulus selisih dua bilangan kompleks, $|\, Z_1 - Z_2 \,|$. Ini menunjukkan bahwa konsep jarak geometri dan struktur aljabar kompleks saling berkorespondensi, sehingga hubungan Menelaus dapat diturunkan tanpa kehilangan makna geometrisnya.

Interpretasi menarik lainnya adalah bahwa pembuktian ini menunjukkan kolinearitas dapat diuji melalui relasi aljabar, bukan semata-mata konstruksi visual. Ini memperlihatkan bahwa konsep garis lurus dalam geometri dapat dipahami sebagai himpunan titik yang memenuhi persamaan linear kompleks tertentu. Dengan perspektif ini, Teorema Menelaus tidak hanya menjadi teorema rasio ruas garis, tetapi juga dapat dipandang sebagai pernyataan mengenai invariansi konfigurasi kolinear pada bidang kompleks.

Pendekatan ini juga mengindikasikan keterkaitan Teorema Menelaus dengan gagasan geometri proyektif dan transformasi affine. Produk rasio pada Teorema Menelaus dapat dipahami sebagai besaran invarian yang tetap dipertahankan oleh struktur geometri tertentu. Dari sudut pandang ini, reformulasi kompleks tidak sekadar menyederhanakan pembuktian, tetapi juga memperluas pemahaman konseptual terhadap teorema tersebut.

Lebih jauh, hasil ini menunjukkan bahwa bilangan kompleks dapat berfungsi sebagai jembatan antara geometri sintetik dan pendekatan aljabar modern. Jika pada geometri klasik fokus terletak pada konstruksi, maka dalam pendekatan kompleks fokus bergeser pada struktur dan hubungan antarobjek geometris melalui operasi aljabar. Pergeseran perspektif ini menjadi salah satu kontribusi penting penelitian ini. Dengan demikian, reformulasi Teorema Menelaus melalui bilangan kompleks tidak hanya memberikan pembuktian alternatif yang lebih ringkas dan sistematis, tetapi juga menghasilkan interpretasi geometris baru yang memperlihatkan keterhubungan antara kolinearitas, struktur affine, dan analisis kompleks dalam satu kerangka yang terpadu.

3.5 Perbandingan dengan Pembuktian Geometri Klasik

Pembuktian Teorema Menelaus secara tradisional dilakukan menggunakan pendekatan geometri sintetik melalui konstruksi garis bantu, kesebangunan segitiga, serta manipulasi perbandingan ruas garis. Pendekatan ini telah lama digunakan dalam geometri Euclid dan efektif untuk menunjukkan kondisi kolinearitas titik-titik transversal pada segitiga. Namun, dibandingkan pendekatan tersebut, reformulasi menggunakan bilangan kompleks pada penelitian ini memberikan sudut pandang yang berbeda, khususnya dari segi struktur pembuktian dan efisiensi analisis.

Dalam pendekatan klasik, pembuktian umumnya dimulai dengan membangun konfigurasi geometris tertentu, kemudian menggunakan kesebangunan beberapa segitiga untuk menurunkan hubungan rasio

$$\frac{|A-P|}{|B-P|}\cdot\frac{|B-Q|}{|Q-C|}\cdot\frac{|C-R|}{|R-A|}=1.$$

Metode ini bersifat konstruktif dan sangat bergantung pada visualisasi geometris. Pada konfigurasi sederhana, pendekatan ini cukup langsung. Namun ketika konfigurasi diperluas atau digeneralisasi, pembuktian sering menjadi panjang dan membutuhkan banyak langkah bantu.

Sebaliknya, pendekatan variabel kompleks yang digunakan dalam penelitian ini tidak bertumpu pada konstruksi geometri tambahan, tetapi pada representasi titik sebagai bilangan kompleks dan parameterisasi titik pada garis maupun ruas garis. Dengan kerangka tersebut, relasi rasio pada Teorema Menelaus diperoleh sebagai konsekuensi aljabar dari parameter titik-titik transversal. Hal ini membuat pembuktian lebih sistematis dan tidak terlalu bergantung pada intuisi visual. Perbedaan kedua pendekatan dapat dirangkum sebagai berikut.

Tabel 1. Perbandingan Pendekatan Geometri Klasik dan Pendekatan Bilangan Kompleks dalam Pembuktian Geometri

Aspek	Pendekatan Geometri Klasik	Pendekatan Bilangan Kompleks
Dasar pembuktian	Kesebangunan segitiga	Manipulasi aljabar kompleks
Teknik utama	Konstruksi garis bantu	Parameterisasi titik
Rasio ruas garis	Diturunkan geometris	Muncul dari modulus kompleks
Struktur pembuktian	Sintetik	Sistematis dan aljabarik
Generalisasi	Relatif terbatas	Lebih terbuka
Efisiensi pembuktian	Cenderung panjang	Lebih ringkas

Tabel 1 menunjukkan bahwa kedua pendekatan memiliki karakteristik berbeda. Pendekatan klasik unggul dalam visualisasi geometris dan memberikan intuisi yang kuat mengenai konfigurasi segitiga, sedangkan pendekatan kompleks menawarkan struktur pembuktian yang lebih kompak dan fleksibel.

Keunggulan utama pendekatan kompleks terletak pada penggunaan parameterisasi. Titik-titik pada sisi segitiga direpresentasikan sebagai kombinasi linear titik ujungnya, sehingga hubungan geometris diterjemahkan menjadi relasi aljabar yang lebih mudah dimanipulasi. Ini berbeda dengan pendekatan klasik yang umumnya membutuhkan argumentasi bertahap melalui beberapa kesebangunan sekaligus. Selain itu, pembuktian kompleks juga menunjukkan bahwa kondisi Menelaus dapat dipandang sebagai suatu invarian aljabar. Perspektif ini sulit terlihat dalam pembuktian Euclid biasa, karena pada pendekatan klasik perhatian lebih banyak tertuju pada konfigurasi geometris daripada struktur hubungan yang mendasarinya.

Hasil ini sejalan dengan kajian Lamuda dan Asriadi (2025) yang menunjukkan bahwa representasi kompleks mampu menyederhanakan pembuktian teorema geometri klasik melalui formulasi yang lebih sistematis. Dalam konteks penelitian ini, penyederhanaan tersebut tampak pada penurunan rasio Menelaus yang diperoleh langsung dari parameter titik tanpa memerlukan konstruksi bantu tambahan. Dibandingkan generalisasi Menelaus oleh Ichikawa et al. (2021), penelitian ini juga memiliki pendekatan berbeda. Jika Ichikawa et al. (2021) memperluas konsep rasio pembagian ke rasio kompleks sebagai bentuk generalisasi teorema, penelitian ini mempertahankan struktur klasik Teorema Menelaus, tetapi membuktikannya kembali menggunakan perangkat aljabar kompleks. Dengan demikian, kontribusi penelitian ini tidak terletak pada perubahan bentuk teorema, melainkan pada metode pembuktiannya.

Dari sisi efisiensi, pendekatan kompleks juga berpotensi lebih mudah diperluas ke konfigurasi yang lebih kompleks, misalnya pada generalisasi poligon atau kajian teorema transversal lain seperti Teorema Ceva. Hal ini karena kerangka aljabar yang digunakan relatif lebih mudah dikembangkan dibanding pendekatan sintetik yang sering memerlukan konstruksi baru untuk setiap kasus. Meski demikian, pendekatan klasik dan pendekatan kompleks bukanlah dua metode yang saling menggantikan, melainkan saling melengkapi. Geometri sintetik memberikan intuisi visual yang kuat, sedangkan bilangan kompleks menyediakan struktur analitik yang lebih sistematis. Kombinasi keduanya justru memperkaya pemahaman terhadap Teorema Menelaus baik dari sisi geometri maupun aljabar. Dengan demikian, pembuktian yang dikembangkan dalam penelitian ini menunjukkan bahwa pendekatan kompleks bukan sekadar alternatif teknis, tetapi menawarkan perspektif baru yang lebih efisien, terstruktur, dan potensial untuk dikembangkan lebih lanjut dalam kajian geometri modern.

4. KESIMPULAN DAN SARAN/REKOMENDASI

4.1 Kesimpulan

1) Teorema Menelaus berhasil direformulasi menggunakan pendekatan bilangan kompleks. Representasi titik, garis, dan ruas garis dalam bidang kompleks memberikan cara yang sistematis dan terstruktur untuk membuktikan teorema ini. Dengan memanfaatkan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks seperti modulus, konjugat, serta parameterisasi titik pada sisi segitiga, pembuktian menjadi lebih ringkas dan efisien dibandingkan metode geometri klasik yang mengandalkan kesebangunan segitiga.
2) Penelitian ini berhasil menyajikan pembuktian Teorema Menelaus dalam dua bagian, yaitu untuk kasus khusus dengan menempatkan salah satu titik sudut segitiga di titik asal, serta untuk bentuk umum tanpa kehilangan sifat kolinearitas. Parameterisasi titik-titik pada sisi segitiga menggunakan bilangan real $t_1, t_2, t_3, t_4, k \; dan \; \lambda$ memungkinkan penurunan rasio panjang ruas garis secara aljabar, sehingga kondisi kolinearitas $\frac{|U-P|}{|V-P|} \cdot \frac{|V-Q|}{|Q-W|} \cdot \frac{|W-R|}{|R-U|} = 1$ dapat diverifikasi dengan langkah-langkah yang jelas dan konsisten.
3) Pendekatan bilangan kompleks terbukti mampu menyederhanakan proses pembuktian menjadi lebih ringkas dan terstruktur dibandingkan metode geometri klasik yang mengandalkan konstruksi garis bantu dan kesebangunan segitiga. Hal ini memperlihatkan bahwa bilangan kompleks tidak hanya berguna dalam analisis, tetapi juga efektif sebagai alat pembuktian dalam geometri bidang.
4) Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan geometri modern dengan mengintegrasikan metode aljabar kompleks ke dalam pembuktian teorema geometri klasik, serta membuka peluang untuk menerapkan pendekatan serupa pada teorema-teorema lain.

4.2 Saran/Rekomendasi

Penelitian selanjutnya disarankan untuk menerapkan pendekatan berbasis bilangan kompleks pada teorema-teorema geometri lainnya guna menemukan pola atau bentuk generalisasi yang baru. Selain itu, eksplorasi yang lebih mendalam mengenai pemanfaatan bilangan kompleks dalam geometri dapat memperkaya khazanah keilmuan serta memperluas cakupan pemahaman matematika. Secara lebih spesifik, perlu dilakukan eksplorasi lanjutan mengenai generalisasi Teorema Menelaus pada poligon dengan jumlah sisi yang lebih banyak (segiempat, segilima, segienam, dan seterusnya) menggunakan bilangan kompleks, sebagaimana telah dikaji oleh peneliti sebelumnya melalui metode geometri klasik. Hal ini diharapkan dapat menghasilkan formulasi yang lebih seragam, ringkas, dan mudah diimplementasikan secara komputasi.

REFERENSI

Asriadi. (2025). *Geometri Analitik via Variabel Kompleks* (1st edn). KOMOJOYO PRESS.

Babusci, Danilo, & Dattoli. (2012). Complex-type numbers and generalizations of the Euler identity. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *22*(2), 271–281.

Dong Hwan, L. (2014). The Role of Principle of Continuity in the Development of Mathematical Knowledge. *Journal for History of Mathematics*, *27*(1), 67–79.

Fenn, R. (2001). *The Geometry of Complex Numbers* (2nd edn). Springer.

Gavagna, & Veronica. (2014). Radices sophisticae, racines imaginaires: The origins of complex numbers in the Late Renaissance. *Springer*, 165--190.

Ichikawa, M., Kita, N., Matsumoto, H., & Nakamura, Y. (2021). *Extension of internal ratio of a line segment into complex values and its application to the generalization of Menelaus' theorem:* 1st International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMMEd 2020). https://doi.org/10.2991/assehr.k.210508.035

Lamuda, Z., & Asriadi. (2025). Pembuktian Teorema Thales Dengan Menggunakan Bilangan Kompleks. *Jurnal Ilmiah Matematika*, *13*(2).

Lexbin, M. (2019). *Fungsi Variabel Kompleks*. IKIP Siliwangi.

Murtadha, L. (2022). Pengembangan Teorema Menelaus Dan Transversal Menelaus Pada Heptagon Tugas Akhir. *UIN SUSKA RIAU*.

Nurahmi, Mashadi, & Hasriati. (2015). Pengembangan Teorema Ceva Dan Teorema Menelaus Pada Segiempat. *Karismatika*, *1*(2), 65–73.

Rohmawati, S. (2020). Pengembangan Teorema Menelaus Dan Transversal Menelaus Pada Segienam. *UIN SUSKA RIAU*.

Sandi, S. A., Mashadi, M., & Gemawati, S. (2018). Pengembangan Teorema Menelaus Pada Segilima. *Jurnal Mathematic Paedagogic*, *3*(1), 57. https://doi.org/10.36294/jmp.v3i1.311

Stillwel, J. (2008). *Geometry of complex numbers and quaternions*. Springer.

Szirmai, J. (2023). On Menelaus' and Ceva's theorems in Nil geometry. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, *15*(1), 123–141. https://doi.org/10.2478/ausm-2023-0008

Tristianto, D., Linawati, L., & Susanto, B. (2018). Penerapan Bilangan Kompleks untuk Menyelesaikan Soal-Soal Geometri Datar. *d'CARTESIAN*, *7*(1), 8. https://doi.org/10.35799/dc.7.1.2018.19548

Unaenah, E., Anggraini, I. A., Aprianti, I., Aini, W. N., Utami, D. C., Khoiriah, S., & Refando, A. (2020). *Teori Van Hiele Dalam Pembelajaran Bangun Datar*.