

Analisis Dinamik Model Penularan Kolera dengan Mempertimbangkan Risiko Individu dan Intervensi Karantina (*Dynamic Analysis of a Cholera Transmission Model Considering Individual Risk and Quarantine Intervention*)

Feni Eliyin¹, Agusyarif Rezka Nuha², La Ode Nashar³

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo

feniellyin@gmail.com¹, agusyarif@ung.ac.id², laode.nashar@ung.ac.id³

Article Info	Abstract
Article history: Received: 10 Maret 2026 Revised: 31 Maret 2026 Accepted: 1 April 2026	This study develops an SIQRB mathematical model to analyze the transmission dynamics of cholera by incorporating individual risk stratification and quarantine interventions. The model consists of six human compartments, including high- and low-risk susceptible individuals, infected individuals from each risk group, quarantined individuals, and recovered individuals, along with one environmental compartment representing the concentration of <i>Vibrio cholerae</i>. This framework allows a comprehensive analysis of the interaction between human populations and environmental factors in disease transmission. The stability analysis shows that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when the basic reproduction number (R_0) is less than one ($R_0 < 1$), and becomes unstable when R_0 exceeds one ($R_0 > 1$), indicating the potential for endemic conditions. Sensitivity analysis identifies the most influential parameters affecting R_0, namely the immigration rate (A), the environmental transmission rate (βb), and the bacterial shedding rate (ξ). These parameters significantly contribute to the increase in disease transmission. Numerical simulations confirm the analytical findings, showing that higher values of these parameters lead to increased numbers of infected individuals and higher environmental bacterial concentrations. Conversely, environmental-based control strategies—such as mobility restrictions, improved sanitation, and water disinfection—are effective in reducing R_0 below one. Therefore, this study highlights the critical importance of environmental interventions in controlling cholera transmission and preventing long-term endemicity.
Keywords: Cholera SIQRB model Basic reproduction number Sensitivity analysis	
Kata Kunci: Kolera Model SIQRB Bilangan reproduksi dasar Analisis sensitivitas	
	Abstrak Penelitian ini mengembangkan model matematika SIQRB untuk menganalisis dinamika penularan kolera dengan mempertimbangkan stratifikasi risiko individu dan intervensi karantina. Model yang dibangun terdiri atas enam kompartemen manusia, yaitu kelompok rentan berisiko tinggi dan rendah, kelompok terinfeksi dari masing-masing risiko, individu dalam karantina, serta individu yang telah pulih, serta satu kompartemen lingkungan yang merepresentasikan konsentrasi bakteri <i>Vibrio cholerae</i>. Pendekatan ini memungkinkan analisis yang lebih komprehensif terhadap interaksi antara faktor manusia dan lingkungan dalam proses penyebaran penyakit. Hasil analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil secara asimtotik lokal ketika bilangan reproduksi dasar (R_0) kurang dari satu ($R_0 < 1$), dan menjadi tidak stabil ketika R_0 lebih besar dari satu ($R_0 > 1$), yang mengindikasikan potensi terjadinya kondisi endemik. Analisis sensitivitas dilakukan untuk

mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai R_0 . Hasilnya menunjukkan bahwa laju imigrasi (Λ), laju penularan melalui lingkungan (βb), serta laju pelepasan bakteri (ξ) merupakan parameter dominan yang berkontribusi terhadap peningkatan nilai R_0 . Simulasi numerik memperkuat hasil analisis teoritis, di mana peningkatan nilai parameter-parameter tersebut menyebabkan peningkatan jumlah individu terinfeksi dan konsentrasi bakteri di lingkungan. Sebaliknya, penerapan strategi pengendalian berbasis lingkungan, seperti pembatasan mobilitas, peningkatan sanitasi, dan disinfeksi sumber air, terbukti efektif dalam menurunkan nilai R_0 hingga di bawah satu. Dengan demikian, penelitian ini menegaskan bahwa intervensi berbasis lingkungan memiliki peran penting dalam mengendalikan penyebaran kolera dan mencegah terjadinya endemisitas.

Corresponding Author:

Feni Elliyin
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Gorontalo
fenielliyin@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Kolera merupakan salah satu penyakit diare akut yang masih menjadi masalah kesehatan global dengan tingkat mortalitas yang tinggi, bahkan menempati peringkat kedua setelah diare akibat rotavirus (World Health Organization, 2024). Penyakit ini disebabkan oleh bakteri *Vibrio cholerae* yang menyebar melalui jalur fekal-oral, terutama akibat konsumsi air dan makanan yang terkontaminasi (Rauf & Prawoto, 2023). Infeksi kolera ditandai dengan diare berair yang parah dan muntah hebat yang dapat menyebabkan dehidrasi akut dalam waktu singkat. Kondisi ini sangat berbahaya dan berpotensi fatal, terutama pada kelompok rentan seperti anak-anak dan masyarakat dengan akses terbatas terhadap layanan kesehatan (Maya, 2022). Secara global, diperkirakan terdapat sekitar 1,3 hingga 4 juta kasus kolera setiap tahunnya (Yusuf, 2023), dengan angka kematian mencapai 21.000 hingga 143.000 jiwa, yang sebagian besar terjadi di negara berpenghasilan rendah dengan keterbatasan akses terhadap air bersih dan sanitasi yang layak.

Upaya pengendalian kolera telah dilakukan melalui berbagai strategi, seperti penyediaan air bersih, peningkatan sanitasi lingkungan, vaksinasi oral, serta terapi rehidrasi (Syafi'i, 2022). Meskipun vaksinasi oral terbukti efektif dalam mengurangi transmisi penyakit (Albalawi et al., 2023), pendekatan berbasis lingkungan tetap menjadi faktor kunci dalam pencegahan jangka panjang, mengingat sumber utama penularan kolera berkaitan erat dengan kondisi sanitasi dan kualitas air (Fitria et al., 2022). Oleh karena itu, diperlukan pendekatan yang komprehensif untuk memahami dinamika penyebaran kolera guna merumuskan strategi intervensi yang lebih efektif dan berkelanjutan.

Dalam konteks ini, pemodelan matematika menjadi salah satu alat penting untuk menganalisis dinamika transmisi penyakit menular, termasuk kolera. Model matematika berbasis sistem persamaan diferensial nonlinier mampu menggambarkan interaksi kompleks antara populasi manusia dan faktor lingkungan dalam proses penyebaran penyakit (Ramdhaniah et al., 2021). Berbagai penelitian sebelumnya telah mengembangkan model kolera dengan pendekatan yang beragam. Kudryashov et al. (2021) meneliti kestabilan model dengan mempertimbangkan dinamika bakteri di lingkungan, sementara Nosheen et al. (2022) mengintegrasikan interaksi antara populasi rentan dan bakteri lingkungan. Maisura et al. (2018) mengembangkan model SIQRB yang memasukkan kompartemen karantina sebagai bentuk intervensi, sedangkan Seidu et al. (2023) mengkaji model SIR-B yang menekankan peran bakteri sebagai faktor penular utama. Penelitian lain oleh Fitria et al. (2022) dan Fitriana et al. (2014) mengintegrasikan kontrol optimal dalam strategi intervensi, sementara Nuha (2020) mempertimbangkan periode inkubasi, dan Imsakiyah (2020) mengembangkan pendekatan model stokastik untuk menangkap ketidakpastian dalam penyebaran penyakit.

Meskipun berbagai model telah dikembangkan, sebagian besar penelitian masih memiliki keterbatasan dalam mengakomodasi heterogenitas populasi, khususnya dalam hal tingkat risiko individu terhadap infeksi. Padahal, dalam kenyataannya, individu memiliki tingkat kerentanan dan perilaku yang berbeda-beda, yang dapat memengaruhi dinamika penyebaran penyakit. Selain itu, integrasi antara stratifikasi risiko individu dengan mekanisme intervensi seperti karantina masih relatif terbatas dalam kajian

sebelumnya. Oleh karena itu, terdapat kebutuhan untuk mengembangkan model yang lebih komprehensif guna memberikan gambaran yang lebih realistis terhadap dinamika penyebaran kolera.

Berdasarkan hal tersebut, urgensi penelitian ini terletak pada pentingnya pengembangan model matematika yang mampu merepresentasikan kompleksitas penyebaran kolera secara lebih akurat, khususnya dengan mempertimbangkan heterogenitas populasi dan intervensi kesehatan masyarakat. Model yang lebih representatif diharapkan dapat menjadi dasar dalam merumuskan kebijakan pengendalian penyakit yang lebih efektif, terutama di wilayah dengan risiko tinggi terhadap wabah kolera.

Adapun kebaruan (novelty) penelitian ini adalah pengembangan model kolera berbasis SIQRB yang mengintegrasikan stratifikasi risiko individu (kelompok risiko rendah dan tinggi) dengan kompartemen karantina, yang merupakan penggabungan dan pengembangan dari model yang diusulkan oleh Seidu et al. (2023) dan Maisura et al. (2018). Pendekatan ini memungkinkan analisis yang lebih mendalam terhadap perbedaan kontribusi masing-masing kelompok risiko dalam penyebaran penyakit serta efektivitas intervensi karantina.

Sejalan dengan itu, tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan dan menganalisis model matematika penyebaran kolera berbasis SIQRB yang mencakup stratifikasi risiko individu dan kompartemen karantina. Analisis yang dilakukan meliputi penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik, analisis kestabilan model, serta analisis sensitivitas untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0). Selain itu, dilakukan simulasi numerik untuk memvalidasi model dan mengevaluasi efektivitas berbagai strategi intervensi, khususnya yang berbasis lingkungan, dalam menekan penyebaran kolera. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teoritis dan praktis dalam pengendalian penyakit kolera secara lebih efektif dan berkelanjutan.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Pendekatan dan Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan rancangan analitis berbasis pemodelan matematis. Pendekatan ini bertujuan untuk menganalisis dinamika penyebaran kolera melalui sistem persamaan diferensial nonlinier serta mengkaji pengaruh parameter terhadap perubahan variabel dalam model. Pemodelan matematis dipilih karena mampu merepresentasikan interaksi kompleks antara populasi manusia dan faktor lingkungan secara sistematis dan terukur. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya berfokus pada deskripsi fenomena, tetapi juga pada analisis hubungan kausal antar variabel dalam sistem yang dikaji.

2.2 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian dilakukan secara bertahap dan sistematis untuk memastikan kejelasan alur analisis serta validitas hasil yang diperoleh. Tahap awal penelitian dimulai dengan studi literatur untuk mengidentifikasi model-model kolera yang telah dikembangkan sebelumnya serta menentukan celah penelitian yang dapat dikembangkan lebih lanjut. Selanjutnya dilakukan perumusan model matematika dengan menetapkan asumsi-asumsi dasar yang relevan dengan karakteristik penyebaran kolera, seperti pembagian kompartemen populasi dan interaksi dengan bakteri lingkungan.

Tahap berikutnya adalah penyusunan sistem persamaan diferensial yang merepresentasikan dinamika model SIQRB yang telah dimodifikasi dengan stratifikasi risiko individu dan kompartemen karantina. Setelah model terbentuk, dilakukan analisis matematis untuk menentukan titik ekuilibrium, baik ekuilibrium bebas penyakit maupun ekuilibrium endemik. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan untuk mengetahui kondisi sistem dalam jangka panjang. Tahapan akhir berupa simulasi numerik untuk memvisualisasikan perilaku model dan mengevaluasi dampak perubahan parameter terhadap dinamika penyebaran penyakit.

2.3 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari berbagai sumber literatur ilmiah, seperti jurnal, buku, dan laporan penelitian yang relevan dengan epidemiologi kolera dan pemodelan matematika. Data tersebut meliputi parameter-parameter model, seperti laju transmisi, tingkat pemulihan, laju kematian, serta parameter yang berkaitan dengan dinamika bakteri lingkungan. Pemilihan data dilakukan secara selektif dengan mempertimbangkan validitas dan relevansi terhadap model yang dikembangkan, sehingga parameter yang digunakan dapat merepresentasikan kondisi nyata secara lebih akurat.

2.4 Populasi dan Sampel Penelitian

Dalam konteks pemodelan matematis, populasi penelitian merujuk pada keseluruhan sistem yang dimodelkan, yaitu populasi manusia yang berpotensi terpapar kolera serta komponen lingkungan yang memengaruhi penyebaran bakteri. Sampel dalam penelitian ini tidak berupa individu, melainkan berupa variasi skenario parameter yang digunakan dalam simulasi model. Variasi parameter ini bertujuan untuk

menguji sensitivitas model terhadap perubahan nilai tertentu serta untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap dinamika sistem, khususnya terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0).

2.5 Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data dilakukan melalui studi dokumentasi dan eksplorasi numerik. Studi dokumentasi digunakan untuk mengumpulkan data parameter dari berbagai sumber literatur yang telah teruji secara ilmiah. Sementara itu, eksplorasi numerik dilakukan untuk menghasilkan data simulasi berdasarkan model yang telah dibangun. Proses ini memungkinkan peneliti untuk mengamati berbagai kemungkinan dinamika sistem berdasarkan variasi parameter yang berbeda.

2.6 Pengembangan dan Validasi Model

Pengembangan model dilakukan melalui proses formulasi matematis yang didasarkan pada asumsi biologis dan epidemiologis yang relevan. Model yang dihasilkan kemudian diverifikasi melalui uji konsistensi matematis, seperti pemeriksaan dimensi, keseimbangan aliran antar kompartemen, serta keberadaan solusi yang realistis (non-negatif). Selain itu, validasi model dilakukan dengan membandingkan hasil simulasi dengan teori yang mendasari serta hasil penelitian sebelumnya, sehingga model yang dikembangkan memiliki tingkat keandalan yang dapat dipertanggungjawabkan.

2.7 Teknik Analisis Data

Teknik analisis data dalam penelitian ini meliputi analisis kualitatif dan kuantitatif. Analisis kualitatif digunakan untuk memahami struktur model dan hubungan antar variabel dalam sistem. Analisis kuantitatif dilakukan melalui perhitungan parameter kunci, seperti bilangan reproduksi dasar (R_0), serta analisis kestabilan titik ekuilibrium menggunakan pendekatan matematis.

Selain itu, dilakukan analisis sensitivitas untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh terhadap perubahan nilai R_0 . Hasil analisis kemudian divisualisasikan dalam bentuk grafik melalui simulasi numerik menggunakan perangkat lunak komputasi. Interpretasi terhadap grafik tersebut dilakukan untuk memahami pola dinamika penyebaran kolera serta mengevaluasi efektivitas strategi intervensi yang diterapkan dalam model.

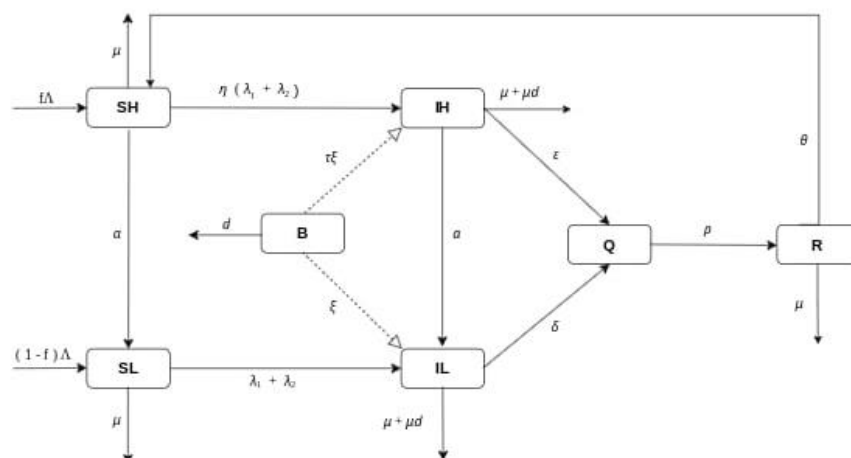
2.8 Keabsahan dan Keterulangan Penelitian

Metode penelitian ini disusun secara terstruktur untuk menjamin keabsahan hasil dan keterulangan penelitian. Setiap tahapan dilakukan secara sistematis, mulai dari perumusan model hingga analisis hasil, dengan menggunakan parameter yang bersumber dari literatur terpercaya. Selain itu, penggunaan perangkat lunak komputasi dalam simulasi memungkinkan proses analisis dapat direplikasi oleh peneliti lain dengan kondisi dan parameter yang sama. Dengan demikian, penelitian ini memiliki tingkat reliabilitas yang tinggi serta dapat menjadi dasar bagi pengembangan penelitian selanjutnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Kolera

Berdasarkan asumsi fundamental terkait mekanisme transmisi penyakit kolera, model ini mengelompokkan populasi manusia ke dalam enam kompartemen: kelompok rentan berisiko tinggi (S_H), kelompok rentan berisiko rendah (S_L), kelompok terinfeksi dari populasi berisiko tinggi (I_H), kelompok terinfeksi dari populasi berisiko rendah (I_L), individu dalam status karantina (Q), serta individu yang telah pulih (R). Selain kompartemen manusia, model ini juga mempertimbangkan lingkungan (B) yang merepresentasikan konsentrasi bakteri *Vibrio cholerae* di habitat perairan.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Kolera

Dimana:

$$\lambda_1 = \frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N}, \lambda_2 = \frac{\beta_b B}{K+B} \quad (1)$$

Model Matematika penyebaran penyakit kolera dikonstruksi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS_L(t)}{dt} &= (1-f) + \alpha S_H + \theta R - \left(\frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N} + \frac{\beta_b B}{K+B} + \mu \right) S_L \\ \frac{dS_H(t)}{dt} &= f\Lambda - \eta_2 \left(\frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N} + \frac{\beta_b B}{K+B} \right) S_H - \alpha S_H - \mu S_H \\ \frac{dI_L(t)}{dt} &= \left(\frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N} + \frac{\beta_b B}{K+B} + \mu \right) S_L + \alpha I_H - (\delta + \mu + \mu d) I_L \\ \frac{dI_H(t)}{dt} &= \eta_2 \left(\frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N} + \frac{\beta_b B}{K+B} \right) S_H + \alpha I_H - (\varepsilon + \mu + \mu d) I_H \\ \frac{dQ(t)}{dt} &= \delta I_L + \varepsilon I_H - (\rho + \mu + \mu d) Q \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \rho Q - (\theta + \mu) R \\ \frac{dB(t)}{dt} &= \xi I_L + \tau \xi I_H - dB \end{aligned} \quad (2)$$

Dengan kondisi awal

$$S_L(0) \geq 0, S_H(0) \geq 0, I_L \geq 0, I_H \geq 0, Q(0) \geq 0, R(0) \geq 0, B(0) \geq 0,$$

dan semua parameter bernilai positif. Adapun parameter yang digunakan pada persamaan (1) disajikan pada Tabel 1.

Table 1. Parameter Model Kolera

Parameter	Keterangan
Λ	Laju rekrutmen populasi
f	Proporsi individu berisiko tinggi
α	Laju perpindahan antar kelas risiko
η_1	Faktor modifikasi penularan infeksi berat
η_2	Faktor modifikasi kerentanan risiko tinggi
β_b	Laju penularan melalui lingkungan
β_h	Laju penularan antar individu
K	Konstanta saturasi lingkungan
μ	Laju kematian alami
μd	Laju kematian akibat penyakit
δ	Laju karantina infeksi ringan
ε	Laju karantina infeksi berat
ρ	Laju pemulihan dari karantina
θ	Laju penurunan kekebalan
ξ	Laju produksi patogen oleh infeksi ringan
τ	Faktor tambahan produksi patogen oleh infeksi berat
d	Laju degradasi patogen di lingkungan

3.2 Titik Keseimbangan Bebas dan Bilangan Reproduksi Dasar

Keseimbangan model penyebaran penyakit diperoleh dari sistem (1) jika:

$$\frac{dS_L}{dt} = \frac{dS_H}{dt} = \frac{dI_L}{dt} = \frac{dI_H}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dB}{dt} = 0 \quad (3)$$

Bilangan reproduksi dasar R_0 berfungsi sebagai indikator kunci untuk mengevaluasi potensi perluasan suatu wabah. Dengan menerapkan metode *next-generation matrix* [3] R_0 , nilai dirumuskan sebagai berikut.

$$R_0 = R_1 + R_2 \quad (4)$$

Dituliskan dengan memisahkan R_0 menjadi R_1 dan R_2 diperoleh:

$$R_1 = \frac{(Mk_1k_3 + f(\alpha^2 + \eta_1\eta_2\mu k_2 + \alpha(\varepsilon + \mu + \eta_2\mu + \mu d))\beta_h)}{(f + M)k_1k_2k_3}$$

$$R_2 = \frac{\Lambda\xi(Mk_1k_3 + f\alpha(\eta_2\mu + k_3) + f\eta_2\mu k_2\tau)\beta_b}{dk\mu k_1k_2k_3}$$

dimana $M = (1 - f)$

Komponen R_1 dan R_2 masing-masing merepresentasikan kontribusi penularan melalui kontak antarindividu dan media lingkungan. Bilangan reproduksi dasar R_0 dapat dipisahkan menjadi kedua komponen tersebut, yang selanjutnya dapat diuraikan ke dalam beberapa subkomponen ekuivalen untuk mendukung analisis pengaruh parameter terhadap dinamika penyebaran penyakit.

Komponen R_1 dapat dinyatakan dalam dua bentuk ekuivalen, yaitu:

$$R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13} + \frac{\eta_2\mu f\alpha\beta_h}{(f+M)k_1k_2k_3} \text{ dan } R_1 = R_{11} + R_{14} + R_{15} + R_{16}.$$

Demikian pula, komponen R_2 dapat dituliskan dalam dua bentuk ekuivalen, yaitu:

$$R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{23} + \frac{f\beta_b\Lambda\xi\alpha\eta_2\mu}{dk\mu k_1k_2k_3} \text{ dan } R_2 = R_{24} + R_{25} + R_{26}.$$

Sistem model (1) memiliki dua kondisi kesetimbangan. Ketika $I_L = I_H = Q = B = 0$, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit.

$$T_1 = (S_L^0, S_H^0, I_L^0, I_H^0, Q^0, R^0, B^0) = \left(\frac{\alpha\Lambda + \Lambda\mu(1-f)}{\mu(\alpha + \mu)}, \frac{f\Lambda}{\mu + \alpha}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (5)$$

Sementara apabila $I_L > 0$, dan $I_H > 0$, maka didapatkan titik kesetimbangan endemik

$$T_2 = (S_L^*, S_H^*, I_L^*, I_H^*, Q^*, R^*, B^*)$$

dengan

$$S_L^* = \frac{k_2k_4\Gamma_1}{k_2k_4(\lambda + \mu) - \theta\rho\lambda}$$

$$S_H^* = \frac{f\Lambda}{k_1 + \eta_2\lambda}$$

$$I_L^* = \frac{\lambda}{k_2} \left(\frac{k_2k_4\Gamma_1}{k_2k_4(\lambda + \mu) - \theta\rho\lambda} + \frac{\eta_2f\Lambda}{k_3(k_1 + \eta_2\lambda)} \right)$$

$$I_H^* = \frac{f\eta_2\lambda\Lambda}{k_1k_3 + k_3\eta_2\lambda}$$

$$Q^* = \frac{I_L\delta + I_H\varepsilon}{k_4}$$

$$R^* = \frac{(I_L\delta + I_H\varepsilon)\rho}{k_4(\theta + \mu)}$$

$$B^* = \frac{I_L + I_H\tau}{d}$$

dimana

$$\lambda = \frac{\beta_h(I_L + \eta_1 I_H)}{N} + \frac{\beta_b B}{K + B}$$

$$\Gamma 1 = (1 - f)\Lambda + \frac{f\Lambda}{k_1 + \eta_2 \lambda} \left(\alpha + \frac{\theta \rho \eta_2 \lambda}{k_2 k_4} \right)$$

$$k_1 = \alpha + \mu, k_2 = \delta + \mu + \mu d, k_3 = \alpha + \varepsilon + \mu + \mu d, k_4 = \rho + \mu + \mu d$$

dan T_2 eksis jika $R_0 > 1$.

3.2 Analisis Kestabilan Kesetimbangan Bebas Penyakit

Model kolera dengan faktor risiko dan karantina dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial nonlinier. Analisis kestabilan titik kesetimbangannya dilakukan melalui linearisasi dan pemeriksaan nilai eigen matriks Jacobian berikut.

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 & J_{16} & J_{17} \\ 0 & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 & 0 & J_{27} \\ J_{31} & 0 & J_{33} & J_{34} & 0 & 0 & J_{37} \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 & J_{47} \\ 0 & 0 & J_{53} & J_{54} & J_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{65} & J_{66} & 0 \\ 0 & 0 & J_{73} & J_{74} & 0 & 0 & J_{77} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Matriks Jacobian digunakan untuk penyelesaian $|\lambda I - J(T_1)| = 0$. Kemudian diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -(\theta + \mu)$, $\lambda_2 = -\mu$, $\lambda_3 = -(\alpha + \mu)$, $\lambda_4 = -(\mu + \mu d + \rho)$, dan $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ yang ditentukan berdasarkan persamaan karakteristik yaitu:

$$a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (7)$$

dengan koefisien

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = d + (1 - R_{12})k_3 + (1 - (R_{11} + R_{13}))k_2$$

$$a_2 = d((1 - (R_{12} + R_{23}))k_3 + (1 - (R_{11} + R_{13} + R_{21} + R_{22}))k_2 + (1 - (R_{14} + R_{15} + R_{16} + R_{11}))k_2 k_3$$

$$a_3 = (1 - (R_0)) + k_2 k_3$$

dengan $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}, R_{21}, R_{22}$, dan R_{23} adalah konstruksi dari R_0 .

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* berlaku $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$, diperoleh λ_5, λ_6 , dan λ_7 bernilai negatif dengan syarat $R_0 < 1$. Sehingga T_1 dikatakan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$.

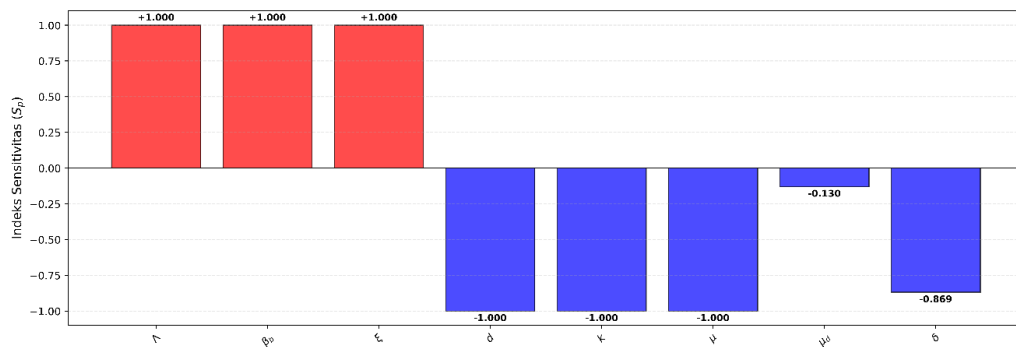
3.3 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas digunakan untuk mengetahui parameter mana saja yang paling memengaruhi dinamika penyebaran kolera. Proses ini dilakukan dengan menghitung indeks sensitivitas dari R_0 melalui pendekatan turunan parsial terhadap masing-masing parameter.

Tabel 2. Nilai Parameter

Λ	20	β_b	0.2143	ε	0.05
f	0.5	k	10^6	p	0.143
a	0.25	d	0.33	θ	9.11×10^{-4}
β_h	4×10^{-5}	μ	5.48×10^{-5}	ξ	100
n_1	1.5	μ_d	0.015	τ	2
n_2	1.5	δ	0.1		

Dengan menggunakan Tabel 2, indeks sensitivitas R_0 untuk setiap parameter, diperoleh menggunakan perangkat lunak *spyder*



Gambar 2. Indeks Sensitivitas R_0

Gambar tersebut menunjukkan hasil analisis parameter yang memiliki sensitivitas paling tinggi terhadap nilai bilangan reproduksi dasar R_0 . Parameter Λ , β_b , dan ξ memiliki indeks positif terbesar, menandakan bahwa peningkatan parameter-parameter ini akan secara langsung meningkatkan nilai R_0 . Sebaliknya, parameter d , k , dan μ memiliki indeks sensitivitas -1 , sehingga kenaikan nilainya justru menurunkan R_0 secara proporsional. Selain itu, parameter μ_d dan δ memberikan pengaruh negatif dengan nilai yang lebih kecil, masing-masing sekitar $-0,130$ dan $-0,869$. Secara keseluruhan, grafik ini memperlihatkan parameter mana yang paling dominan dalam memengaruhi dinamika penularan, sehingga dapat menjadi dasar dalam menentukan strategi pengendalian penyakit yang lebih efektif.

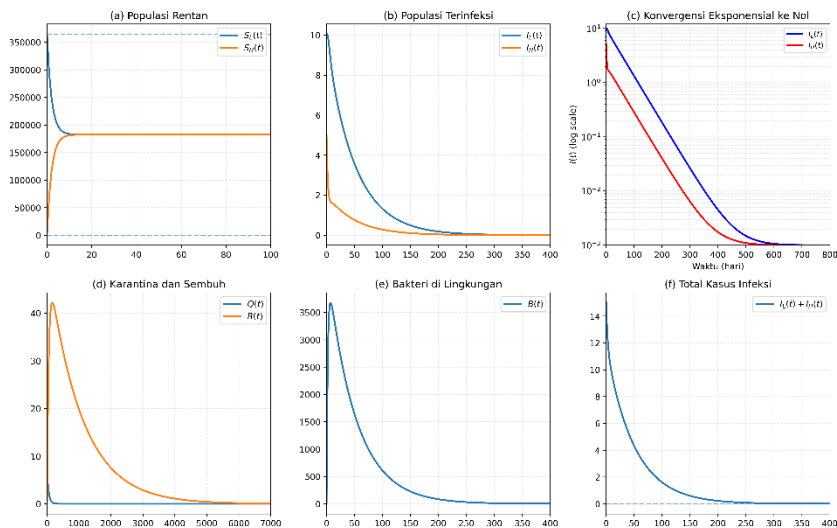
3.4 Simulasi Numerik

Pemodelan kolera diselesaikan secara numerik dengan kondisi awal $S_L(0)$, $S_H(0)$, $I_L(0)$, $I_H(0)$, $Q(0)$, $R(0)$, $B(0) = 364.923,5$, 40 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 . Hasil simulasi menunjukkan perilaku dan kestabilan dari solusi model.

3.4.1 Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 < 1$

Hasil simulasi menunjukkan bahwa nilai $R_0 = 0,481 < 1$, yang mengindikasikan bahwa tingkat penularan penyakit kolera tidak cukup kuat untuk mempertahankan wabah dalam populasi. Secara dinamis, jumlah individu terinfeksi, baik pada kelompok risiko rendah (I_L) maupun risiko tinggi (I_H), mengalami penurunan yang signifikan sejak awal waktu dan cenderung menurun secara eksponensial hingga mendekati nol. Penurunan ini menunjukkan bahwa laju pemulihan, karantina, serta faktor pengurangan infeksi lainnya lebih dominan dibandingkan laju penularan penyakit. Di sisi lain, populasi rentan (S_L dan S_H) cenderung meningkat pada awalnya dan kemudian mencapai kondisi stabil seiring dengan berkurangnya tekanan infeksi dalam sistem.

Populasi karantina (Q) dan populasi sembuh (R) menunjukkan peningkatan pada fase awal simulasi sebagai respons terhadap adanya individu terinfeksi yang dikarantina dan menjalani proses pemulihan. Namun, seiring menurunnya jumlah kasus infeksi baru, kedua kompartemen ini juga mengalami penurunan atau mencapai kondisi konstan. Sementara itu, konsentrasi bakteri di lingkungan (B) sempat meningkat akibat kontribusi dari individu terinfeksi, tetapi kemudian menurun secara bertahap karena tidak adanya suplai bakteri yang signifikan dari populasi. Secara keseluruhan, dinamika seluruh kompartemen menunjukkan bahwa sistem bergerak menuju kondisi bebas penyakit (disease-free equilibrium), sehingga wabah kolera akan punah secara alami ketika $R_0 < 1$. Kondisi ini juga menegaskan bahwa sistem memiliki kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan bebas penyakit.



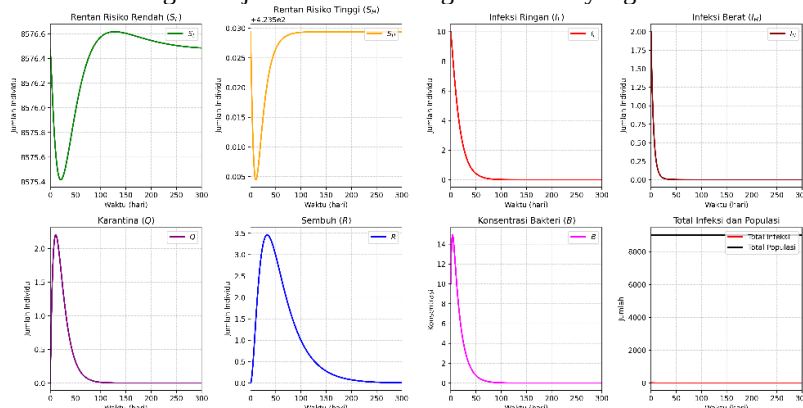
Gambar 3. Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 < 1$

3.4.2 Simulasi Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 > 1$

Hasil simulasi numerik pada kondisi $R_0 > 1$ menunjukkan bahwa sistem tidak lagi menuju titik kesetimbangan bebas penyakit, melainkan bergerak menuju titik kesetimbangan endemik yang stabil. Nilai R_0 yang lebih besar dari satu mengindikasikan bahwa setiap individu terinfeksi mampu menghasilkan lebih dari satu kasus baru, sehingga penularan penyakit kolera dapat terus berlangsung dalam populasi. Secara dinamis, pada fase awal waktu terlihat adanya peningkatan jumlah individu terinfeksi, baik pada kelompok risiko rendah (I_L) maupun risiko tinggi (I_H), yang mencerminkan dominannya laju transmisi dibandingkan laju pemulihan dan pengendalian. Namun setelah mencapai puncaknya, jumlah individu terinfeksi tidak terus meningkat, melainkan menurun dan kemudian menetap pada nilai konstan yang relatif kecil, menunjukkan tercapainya keseimbangan antara proses infeksi, pemulihan, dan karantina.

Populasi rentan, baik S_L maupun S_H , mengalami perubahan signifikan pada awal simulasi akibat tingginya paparan infeksi, kemudian secara bertahap menyesuaikan diri hingga mencapai kondisi stabil pada tingkat tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun masih terdapat individu yang rentan, laju infeksi yang terjadi telah diimbangi oleh keluarnya individu dari kompartemen tersebut menuju kompartemen lain. Sementara itu, populasi karantina (Q) dan populasi sembuh (R) mengalami peningkatan pada fase awal sebagai respons terhadap bertambahnya kasus infeksi, kemudian menurun dan stabil seiring dengan tercapainya keseimbangan dinamis dalam sistem. Konsentrasi bakteri di lingkungan (B) juga menunjukkan pola yang serupa, yaitu meningkat akibat kontribusi dari individu terinfeksi, lalu menurun dan akhirnya menetap pada nilai konstan yang mencerminkan keseimbangan antara produksi dan peluruhan bakteri di lingkungan.

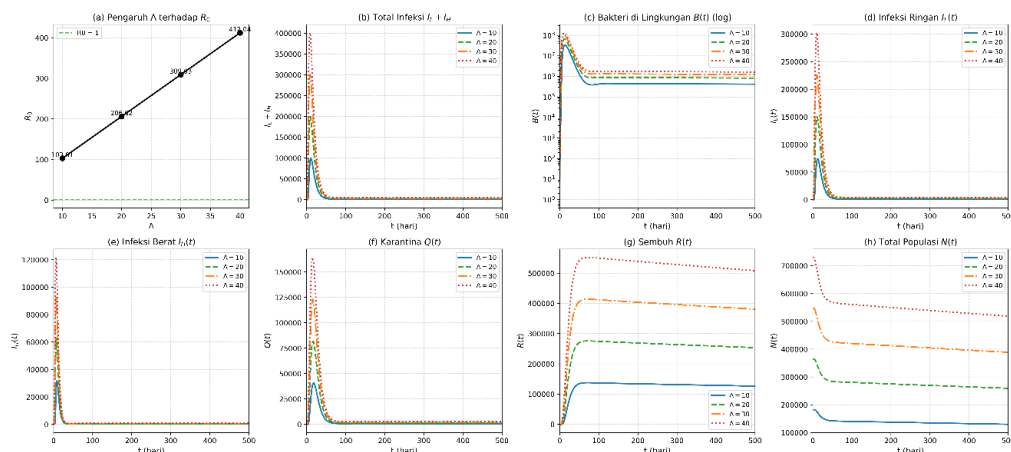
Secara keseluruhan, dinamika seluruh kompartemen memperlihatkan bahwa sistem mencapai keadaan tunak (steady state) dengan semua variabel berada pada nilai positif. Kondisi ini menegaskan bahwa penyakit tidak akan punah, tetapi tetap bertahan dalam populasi pada tingkat endemik yang stabil. Dengan demikian, meskipun jumlah individu terinfeksi relatif kecil (sekitar 0,94%), keberadaan bakteri di lingkungan dan interaksi antar kompartemen memungkinkan penularan tetap berlangsung dalam jangka panjang. Hasil ini mengkonfirmasi secara numerik bahwa ketika $R_0 > 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil dan sistem akan cenderung menuju titik kesetimbangan endemik yang stabil secara asimtotik.



Gambar 4. Simulasi Dinamika Proporsi Populasi pada Kondisi $R_0 > 1$

3.4.3 Simulasi Pengaruh Λ Terhadap Dinamika R_0

Simulasi numerik menunjukkan bahwa parameter imigrasi (Λ) sangat memengaruhi nilai R_0 , di mana peningkatan Λ secara langsung meningkatkan nilai R_0 hingga berada di atas satu. Hal ini mengindikasikan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil dan sistem cenderung menuju kondisi endemik. Grafik simulasi memperlihatkan bahwa jumlah total infeksi dan konsentrasi bakteri di lingkungan mencapai nilai stabil yang semakin tinggi seiring dengan meningkatnya Λ . Selain itu, populasi terinfeksi ringan, terinfeksi berat, karantina, dan sembuh juga menunjukkan peningkatan yang signifikan pada nilai puncak dan keadaan tunaknya. Analisis sensitivitas mengonfirmasi adanya hubungan positif, yaitu $\frac{\partial R_0}{\partial \Lambda} > 0$. Oleh karena itu, pengurangan laju imigrasi menjadi strategi penting untuk menurunkan nilai R_0 hingga berada di bawah satu. Secara praktis, langkah-langkah seperti pembatasan mobilitas, skrining pendatang, karantina, serta peningkatan sanitasi perlu diterapkan untuk mencegah penyakit berkembang menjadi endemik.



Gambar 5. Simulasi Pengaruh Λ Terhadap Dinamika R_0

4. KESIMPULAN DAN SARAN/REKOMENDASI

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis matematis dan simulasi numerik yang telah dilakukan, penelitian ini menegaskan bahwa bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter kunci dalam menentukan dinamika penyebaran kolera dalam populasi. Ketika $R_0 < 1$, sistem secara konsisten bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit (disease-free equilibrium) yang stabil, di mana jumlah individu terinfeksi menurun hingga mendekati nol dan wabah pada akhirnya punah. Sebaliknya, ketika $R_0 > 1$, titik bebas penyakit menjadi tidak stabil dan sistem akan menuju titik kesetimbangan endemik, ditandai dengan keberadaan infeksi yang bertahan pada tingkat tertentu dalam jangka panjang. Hasil simulasi numerik secara jelas memperlihatkan konvergensi solusi model menuju kedua kondisi tersebut, sehingga memperkuat validitas analisis teoritis yang telah diperoleh.

Lebih lanjut, analisis sensitivitas menunjukkan bahwa tidak semua parameter memiliki pengaruh yang sama terhadap nilai R_0 . Parameter seperti laju imigrasi (Λ), tingkat penularan melalui lingkungan (β_b), dan laju pelepasan bakteri ke lingkungan (ξ) memiliki pengaruh positif yang dominan terhadap peningkatan R_0 , sehingga berperan sebagai faktor utama yang mendorong terjadinya wabah. Peningkatan nilai parameter-parameter ini secara langsung memperbesar peluang penyebaran penyakit dalam populasi. Sebaliknya, parameter seperti laju disinfeksi lingkungan (d), kapasitas lingkungan (K), dan laju kematian alami (μ) memberikan pengaruh negatif yang signifikan terhadap R_0 , sehingga berfungsi sebagai faktor pengendali yang dapat menekan laju penularan dan membantu mengarahkan sistem menuju kondisi bebas penyakit.

Secara keseluruhan, temuan penelitian ini memberikan implikasi penting dalam pengendalian kolera, khususnya dalam merancang strategi intervensi yang efektif. Upaya pengendalian sebaiknya difokuskan pada pengurangan faktor-faktor yang meningkatkan R_0 , seperti membatasi paparan terhadap sumber infeksi lingkungan dan menekan kontaminasi bakteri, serta memperkuat faktor-faktor yang menurunkannya, seperti peningkatan sanitasi, disinfeksi lingkungan, dan pengelolaan populasi. Dengan pendekatan yang tepat terhadap parameter-parameter kunci tersebut, pengendalian wabah kolera dapat dilakukan secara lebih optimal dan berkelanjutan.

4.2 Saran/Rekomendasi

Upaya pengendalian penyebaran penyakit Kolera perlu difokuskan pada peningkatan kualitas sanitasi lingkungan, pengolahan air bersih, serta pengurangan kontaminasi bakteri karena penularan berbasis lingkungan berpengaruh dominan terhadap nilai R_0 . Selain itu, laju perekrutan atau mobilitas penduduk (Λ) terbukti berdampak signifikan terhadap peningkatan bilangan reproduksi dasar, sehingga pengawasan terhadap perpindahan penduduk dan wilayah rawan penyebaran perlu ditingkatkan guna menekan potensi transmisi. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji kestabilan global model dengan mempertimbangkan variasi spasial, perubahan musiman, perilaku masyarakat, serta penambahan mekanisme intervensi kesehatan lingkungan agar model mampu menggambarkan penyebaran Kolera secara lebih komprehensif.

REFERENSI

- Albalawi, W., Nisar, K. S., Aslam, A., Ozair, M., Hussain, T., Shoaib, M., & Zahran, H. Y. (2023). Mathematical modelling approach to cholera transmission with vaccination strategy. *Alexandria Engineering Journal*, 75, 191-207.
- Fitria, I., Azahra, N., Agustina, C. S., Subchan, S., & Cahyaningtias, S. (2022). Optimal control on cholera disease spreading model with three variables control variation. *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap*, 16(2), 463-470.
- Fitrianah, A., Khatizah, E., & Kusnanto, A. (2014). Analisis Dinamika Model Penyebaran Penyakit Kolera. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 13(2), 249-297.
- Imsakiyah, S. (2020). *Peran World Health Organization (Who) Dalam Menangani Wabah Kolera Di Yaman Periode 2017-2019* (Bachelor's thesis, Fisip UIN Jakarta).
- Kudryashov, N. A., Chmykhov, M. A., & Vigdorowitsch, M. (2021). Analytical features of the SIR model and their applications to COVID-19. *Applied Mathematical Modelling*, 90, 466-473.
- Maisura, M., Sumarno, H., & Sianturi, P. (2018). Model Stokastik Penyebaran Penyakit Kolera. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 17(1), 260-905.
- Maya, W. R. (2022). Aplikasi Sistem Pakar Untuk Mendiagnosa Lebih Dini Penyakit Kolera Pada Anak Menggunakan Metode K-Nearest Neighbor (KNN). *Journal of Science and Social Research*.
- Nosheen, F., Malik, N., Mehmood, Z., Jabeen, F., Mahmood, A., Ibrahim, M., Bokhari, A., Mubashir, M., Chuah, L. F., & Show, P. L. (2022). Biomedical waste management associated with infectious diseases among health care professionals in apex hospitals of a typical south asian city. *Environmental research*, 215, 114240.
- Nuha, A. R. (2020). Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera Dengan Mempertimbangkan Masa Inkubasi. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 17(2), 212-229.
- Ramdhaniah, E. N., Sundari, P. I., & Sari, A. W. (2021). Dampak penanganan epidemi kolera terhadap kondisi sosial budaya Penduduk Batavia tahun 1900-1920. *Historiography: Journal of Indonesian History and Education*, 1(3), 284-301.
- Rauf, T. C. I., & Prawoto, B. P. (2023). Dinamika Penyebaran Penyakit Kolera Dengan Adanya Vaksinasi. *JURNAL SILOGISME: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, 8(1), 56-66.
- Seidu, B., Wiah, E. N., & Asamoah, J. K. K. (2023). Optimal strategies for control of cholera in the presence of hyper-infective individuals. *Results in Physics*, 53, 106968.
- Syafi'i, A. (2022). Estimasi Model Penyebaran Penyakit Kolera dengan Karantina Menggunakan Ensemble Kalman Filter. *Borneo Journal of Science and Mathematics Education*, 1(2), 93-101.
- World Health Organization. (2024). Multi-country outbreak of cholera, External situation report #12 - 14 March 2024.
- Yusuf, A. (2023). Keterlibatan WHO dalam Penanganan Wabah Kolera di Nigeria Tahun 2018. *Global and Policy Journal of International Relations*, 11(01).